Sous-variétés spéciales des variétés Spin^c

Roger NAKAD

Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré, Nancy 1

9 Mai 2011

Plan

- Motivations et préliminaires
- Présentation des résultats :
  1. **Spectre de l'opérateur de Dirac Spin^c** (J. Geom. Phys. 2010 et Adv. Math. Phys. 2011).
  2. Les structures complexes et CR via les spineurs Spin^c (avec R. Herrera, 2011).
  3. Le tenseur d'énergie-impulsion sur les variétés Spin^c (avec G. Habib, 2010 et IJGMMP 2011).
  4. **Hypersurfaces Spin^c et correspondance de Lawson** (avec J. Roth, 2011).
  5. L'opérateur de Dirac sur le bord d'une variété Spin^c (2011).
- Perspectives

Structures Spin : le cadre intrinsèque

Soit (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte à courbure scalaire S strictement positive.

1. Lichnerowicz (1963) :

$$\lambda^2 > \frac{1}{4} \inf_M \mathrm{S}.$$

2. Friedrich (1980) :

$$\lambda^2 \geqslant \frac{n}{4(n-1)} \inf_M \mathrm{S}.$$

Structures Spin : le cadre intrinsèque

Soit (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte à courbure scalaire S strictement positive.

1. Lichnerowicz (1963) :

$$\lambda^2 > \frac{1}{4} \inf_M \mathrm{S}.$$

2. Friedrich (1980) :

$$\lambda^2 \geqslant \frac{n}{4(n-1)} \inf_M \mathrm{S}.$$

Structures Spin : le cadre extrinsèque

- Friedrich (1998) a montré qu'il existe une équivalence entre :
  1. Il existe une immersion isométrique de (M^2, g) dans $\mathbb{R}^3$.
  2. M admet un spineur de Killing généralisé.
  3. M admet un spineur de norme constante vérifiant l'équation de Dirac.
- Hijazi-Montiel-Zhang (2000) : sur le bord compact d'une variété spinorielle (M^n, g)

$$\lambda_1 \geqslant \frac{n-1}{2} \inf_M H,$$

où H est la courbure moyenne du bord.

Application du cas limite : une preuve spinorielle élémentaire du théorème d'Alexandrov.

Structures Spin : le cadre extrinsèque

- Friedrich (1998) a montré qu'il existe une équivalence entre :

  1. Il existe une immersion isométrique de (M^2, g) dans $\mathbb{R}^3$.
  2. M admet un spineur de Killing généralisé.
  3. M admet un spineur de norme constante vérifiant l'équation de Dirac.

- Hijazi-Montiel-Zhang (2000) : sur le bord compact d'une variété spinorielle (M^n, g)

$$\lambda_1 \geqslant \frac{n-1}{2} \inf_M H,$$

où H est la courbure moyenne du bord.

<u>Application du cas limite</u> : une preuve spinorielle élémentaire du théorème d'Alexandrov.

Le passage de Spin à Spin^c

Les équations de Seiberg-Witten (1994)

$$\Downarrow$$

Travaux de Donaldson (1982)

Applications :

1. Calcul de l'invariant de Yamabe (LeBrun-Gursky 1997)
2. Restrictions topologiques sur les variétés d'Einstein de dimension 4 (LeBrun 1995).

Le passage de Spin à Spin^c

Les équations de Seiberg-Witten (1994)

$$\Downarrow$$

Travaux de Donaldson (1982)

Applications :

1. Calcul de l'invariant de Yamabe (LeBrun-Gursky 1997)
2. Restrictions topologiques sur les variétés d'Einstein de dimension 4 (LeBrun 1995).

Structures Spin^c : le cadre intrinsèque

- Les variétés Spin, presque complexes, kählériennes, de Sasaki et certaines variétés CR possèdent une structure Spin^c canonique.
- Moroianu (1999) a montré la conjecture de Lichnerowicz sur les variétés kählériennes limites pour l'inégalité de Kirchberg de dimension complexe paire.

Structures Spin^c : le cadre intrinsèque

- Les variétés Spin, presque complexes, kählériennes, de Sasaki et certaines variétés CR possèdent une structure Spin^c canonique.

- Moroianu (1999) a montré la conjecture de Lichnerowicz sur les variétés kählériennes limites pour l'inégalité de Kirchberg de dimension complexe paire.

Structures Spin^c : le cadre extrinsèque

- Hijazi-Montiel-Urbano (2006) : soit (M^{2m}, g) une variété Kähler-Einstein de courbure scalaire positive.

La restriction des spineurs de Killing kählériens Spin^c sur certaines sous-variétés spéciales

$$\Downarrow$$

Des informations géométriques et topologiques sur ces sous-variétés spéciales.

La restriction des spineurs $\mathrm{Spin^c}$ *est un outil efficace pour étudier la géométrie et la topologie des sous-variétés :*

1. *Caractérisation* $\mathrm{Spin^c}$ *des immersions isométriques dans des variétés de dimension* 3.
2. *Application : la correspondance de Lawson pour les surfaces à courbure moyenne constante.*

Définitions

Soit (M^n, g) une variété riemannienne orientée (compacte).

- M admet une structure spinorielle $(\mathrm{Spin}) \iff \omega_2(M) = 0$.
- Cette condition est assez restrictive ($\mathbb{C}P^2$ n'est pas Spin mais Spin^c).
- M admet une structure $\mathrm{Spin}^c \iff$ il existe un fibré en droites L tel que

$$\omega_2(M) = [c_1(L)]_{mod\ 2}.$$

Définitions

Soit (M^n, g) une variété riemannienne orientée (compacte).

- M admet une structure spinorielle $(\mathrm{Spin}) \iff \omega_2(M) = 0$.
- Cette condition est assez restrictive ($\mathbb{C}P^2$ n'est pas Spin mais Spin^c).
- M admet une structure Spin^c $\iff$ il existe un fibré en droites L tel que

$$\omega_2(M) = [c_1(L)]_{mod\ 2}.$$

Définitions

Soit (M^n, g) une variété riemannienne orientée (compacte).

- M admet une structure spinorielle $(\mathrm{Spin}) \iff \omega_2(M) = 0$.
- Cette condition est assez restrictive ($\mathbb{C}P^2$ n'est pas Spin mais Spin^c).
- M admet une structure $\mathrm{Spin}^c \iff$ il existe un fibré en droites L tel que

$$\omega_2(M) = [c_1(L)]_{mod\ 2}.$$

- Le fibré des spineurs Spin^c s'écrit :

$$\Sigma M = \underbrace{\Sigma' M}_{\text{fibré des spineurs}} \otimes L^{\frac{1}{2}}.$$

- La donnée d'une connexion sur le *fibré auxiliaire* L permet de définir une connexion (tordue) ∇ sur ΣM. L'opérateur de Dirac (tordu) est alors défini par

$$\begin{aligned} D : \Gamma(\Sigma M) &\longrightarrow \Gamma(\Sigma M) \\ \psi &\longrightarrow D\psi = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot \nabla_{e_j} \psi. \end{aligned}$$

- Le fibré des spineurs $\mathrm{Spin^c}$ s'écrit :

$$\Sigma M = \underbrace{\Sigma' M}_{\text{fibré des spineurs}} \otimes L^{\frac{1}{2}}.$$

- La donnée d'une connexion sur le *fibré auxiliaire* L permet de définir une connexion (tordue) ∇ sur ΣM. L'opérateur de Dirac (tordu) est alors défini par

$$\begin{aligned} D : \Gamma(\Sigma M) &\longrightarrow \Gamma(\Sigma M) \\ \psi &\longrightarrow D\psi = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot \nabla_{e_j}\psi. \end{aligned}$$

Spectre de Dirac et le tenseur d'énergie-impulsion

- Hijazi (1995) :

$$\lambda^2 \geqslant \inf_M \left(\frac{1}{4}\mathrm{S} + |\mathrm{T}^\psi|^2\right),$$

où T^ψ est le tenseur d'énergie-impulsion défini par

$$T^\psi(X,Y) = \frac{1}{2}\Re < X \cdot \nabla_Y \psi + Y \cdot \nabla_X \psi, \frac{\psi}{|\psi|^2} > .$$

- Comme $|T^\psi|^2 \geqslant \frac{(\mathrm{tr}\, T^\psi)^2}{n} = \frac{\lambda^2}{n}$, l'inégalité de Hijazi implique celle de Friedrich (1980) :

$$\lambda^2 \geqslant \frac{n}{4(n-1)} \inf_M \mathrm{S}.$$

Spectre de Dirac et le tenseur d'énergie-impulsion

- Hijazi (1995) :

$$\lambda^2 \geqslant \inf_M \left(\frac{1}{4}\mathrm{S} + |\mathrm{T}^\psi|^2\right),$$

où T^ψ est le tenseur d'énergie-impulsion défini par

$$T^\psi(X, Y) = \frac{1}{2}\Re < X \cdot \nabla_Y \psi + Y \cdot \nabla_X \psi, \frac{\psi}{|\psi|^2} > .$$

- Comme $|T^\psi|^2 \geqslant \frac{(\mathrm{tr}\, T^\psi)^2}{n} = \frac{\lambda^2}{n}$, l'inégalité de Hijazi implique celle de Friedrich (1980) :

$$\lambda^2 \geqslant \frac{n}{4(n-1)} \inf_M \mathrm{S}.$$

Spectre de Dirac et le tenseur d'énergie-impulsion

- Hijazi (1995) :

$$\lambda^2 \geqslant \inf_M \left(\frac{1}{4}\mathrm{S} + |\mathrm{T}^\psi|^2\right),$$

où T^ψ est le tenseur d'énergie-impulsion défini par

$$T^\psi(X, Y) = \frac{1}{2}\Re < X \cdot \nabla_Y \psi + Y \cdot \nabla_X \psi, \frac{\psi}{|\psi|^2} > .$$

- Comme $|T^\psi|^2 \geqslant \frac{(\mathrm{tr}\, T^\psi)^2}{n} = \frac{\lambda^2}{n}$, l'inégalité de Hijazi implique celle de Friedrich (1980) :

$$\lambda^2 \geqslant \frac{n}{4(n-1)} \inf_M \mathrm{S}.$$

- Bourguignon-Gauduchon (1992) ont montré que pour tout champ de spineurs ψ, on a

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_M \Re < D^{M_t}\psi_t, \psi_t > v_g = -\frac{1}{2}\int_M < k, T_\psi > v_g,$$

où $g_t = g + tk$ et ψ_t est l'image de ψ par l'isométrie entre les fibrés des spineurs Spin^c de M et $M_t = (M, g_t)$.

- Friedrich-Kim (2000) ont obtenu les équations de Dirac-Einstein

$$\begin{cases} D_g\psi = \lambda\psi, \\ \mathrm{ric}_g - \frac{\mathrm{S_g}}{2}\, g = \frac{1}{2} T_\psi, \end{cases}$$

comme les équations d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle

$$\mathcal{W}(g,\psi) = \int_M \Big(\mathrm{S_g} + \lambda|\psi|^2_{\mathrm{g}} - \Re < \mathrm{D_g}\psi, \psi > \Big)\mathrm{v_g}.$$

Inégalité de type-Hijazi

Théorème (Na. 2010, J. Geom. Phys.)

Sur une variété $\mathrm{Spin^c}$ *compacte, toute valeur propre à laquelle est attachée un spineur propre* ψ *satisfait une inégalité de type-Hijazi*

$$\lambda^2 \geq \inf_M \left(\frac{1}{4}\mathrm{S} - \frac{c_n}{4}|\Omega| + |T^\psi|^2\right), \tag{1}$$

où $c_n = 2[\frac{n}{2}]^{\frac{1}{2}}$.

Cette inégalité implique l'inégalité de type Friedrich $\mathrm{Spin^c}$ établie par Moroianu-Herzlich (1999) :

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \inf_M (\mathrm{S} - c_n|\Omega|).$$

Inégalité de type-Hijazi

Théorème (Na. 2010, J. Geom. Phys.)

Sur une variété Spin^c *compacte, toute valeur propre à laquelle est attachée un spineur propre* ψ *satisfait une inégalité de type-Hijazi*

$$\lambda^2 \geq \inf_M \left(\frac{1}{4}\mathrm{S} - \frac{c_n}{4}|\Omega| + |T^\psi|^2\right), \qquad (1)$$

où $c_n = 2[\frac{n}{2}]^{\frac{1}{2}}$.

Cette inégalité implique l'inégalité de type Friedrich Spin^c établie par Moroianu-Herzlich (1999) :

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \inf_M (\mathrm{S} - c_n|\Omega|).$$

Le cas limite

- Le cas limite est caractérisé, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, par

$$\begin{cases} \nabla_X \psi = -T^{\psi}(X) \cdot \psi \\ \Omega \cdot \psi = i\frac{c_n}{2}|\Omega|\psi \end{cases}$$

- Friedrich (1998) : soit (M^2, g) orientée et simplement connexe. Il existe une équivalence entre :
  1. Il existe une immersion isométrique de (M^2, g) dans $\mathbb{R}^3$.
  2. M admet un spineur ψ vérifiant $\nabla_X \psi = -T^{\psi}(X) \cdot \psi$.
  3. M admet un spineur ψ, de norme constante, vérifiant $D\psi = H\psi$.

Le cas limite

- Le cas limite est caractérisé, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, par

$$\begin{cases} \nabla_X \psi = -T^{\psi}(X) \cdot \psi \\ \Omega \cdot \psi = i\frac{c_n}{2}|\Omega|\psi \end{cases}$$

- Friedrich (1998) : soit (M^2, g) orientée et simplement connexe. Il existe une équivalence entre :
  1. Il existe une immersion isométrique de (M^2, g) dans $\mathbb{R}^3$.
  2. M admet un spineur ψ vérifiant $\nabla_X \psi = -T^{\psi}(X) \cdot \psi$.
  3. M admet un spineur ψ, de norme constante, vérifiant $D\psi = H\psi$.

Les variétés homogènes de dimension 3 avec groupe d'isométries de dimension 4

- Les $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ sont des fibrations riemanniennes sur une variété à courbure constante κ, notée $\mathbb{M}^2(\kappa)$, dont les fibres sont géodésiques et τ mesure le défaut de la fibration à être un produit riemannien.
- Ces variétés définissent la géométrie de Thurston :

$$\underbrace{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}}_{\tau=0,\kappa=1},\ \underbrace{\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}}_{\tau=0,\kappa=-1},\ \underbrace{\mathrm{Nil}_3}_{\tau\neq0,\kappa=0},\ \underbrace{\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}}_{\tau\neq0,\kappa<0}.$$

$$\underbrace{\text{Sphères de Berger}}_{\tau\neq0,\kappa>0}$$

Les variétés homogènes de dimension 3 avec groupe d'isométries de dimension 4

- Les $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ sont des fibrations riemanniennes sur une variété à courbure constante κ, notée $\mathbb{M}^2(\kappa)$, dont les fibres sont géodésiques et τ mesure le défaut de la fibration à être un produit riemannien.
- Ces variétés définissent la géométrie de Thurston :

$$\underbrace{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}}_{\tau=0,\kappa=1},\ \underbrace{\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}}_{\tau=0,\kappa=-1},\ \underbrace{\mathrm{Nil}_3}_{\tau\neq0,\kappa=0},\ \underbrace{\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}}_{\tau\neq0,\kappa<0}.$$

$$\underbrace{\text{Sphères de Berger}}_{\tau\neq0,\kappa>0}$$

Restriction à une surface

- Les variétés $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ sont des variétés Spin^c admettant un spineur de Killing ψ de constante de Killing $\frac{\tau}{2}$.

- Grâce à la formule de Gauss Spin^c, la restriction de ψ à une surface orientée est un spineur φ vérifiant

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2} II(X) \cdot \varphi + i\frac{\tau}{2} X \cdot \overline{\varphi},$$

où $\overline{\varphi} := \varphi_+ - \varphi_-$ est le conjugué de $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$ et II la seconde forme fondamentale de l'immersion.

Restriction à une surface

- Les variétés $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ sont des variétés Spin^c admettant un spineur de Killing ψ de constante de Killing $\frac{\tau}{2}$.

- Grâce à la formule de Gauss Spin^c, la restriction de ψ à une surface orientée est un spineur φ vérifiant

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2} II(X) \cdot \varphi + i\frac{\tau}{2} X \cdot \overline{\varphi},$$

où $\overline{\varphi} := \varphi_+ - \varphi_-$ est le conjugué de $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$ et II la seconde forme fondamentale de l'immersion.

Théorème (avec J. Roth, 2011)

Il y a équivalence entre :

1. (M^2, g) *est immergée isométriquement dans* $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ *avec seconde forme fondamentale* A.
2. *Il existe sur* M *un spineur* φ *vérifiant :*

$$\begin{cases} \nabla_X \varphi = -\frac{1}{2} A(X) \cdot \varphi + i\frac{\tau}{2} X \cdot \overline{\varphi}, \\ i\Omega(e_1, e_2) = -i(\kappa - 4\tau^2) < \varphi, \frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|^2} > . \end{cases}$$

3. *Il existe un spineur* φ *vérifiant :*

$$\begin{cases} D\varphi = H\varphi - i\tau\overline{\varphi}, \\ |\varphi| = constante, \\ i\Omega(e_1, e_2) = -i(\kappa - 4\tau^2) < \varphi, \frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|^2} > . \end{cases}$$

Correspondance de Lawson

Théorème (avec J. Roth, 2011)

Toute surface, à $H = 0$, simplement connexe immergée dans Nil_3 est isométrique à une surface, à $H = \frac{1}{2}$, simplement connexe immergée dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

- On en déduit la correspondance de Lawson pour les surfaces à courbure moyenne constante, immergées dans $\mathbb{E}(\kappa_1, \tau_1)$ et $\mathbb{E}(\kappa_2, \tau_2)$ avec $\kappa_1 - 4\tau_1^2 = \kappa_2 - 4\tau_2^2$.

Correspondance de Lawson

Théorème (avec J. Roth, 2011)

Toute surface, à $H = 0$, simplement connexe immergée dans Nil_3 est isométrique à une surface, à $H = \frac{1}{2}$, simplement connexe immergée dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

- On en déduit la correspondance de Lawson pour les surfaces à courbure moyenne constante, immergées dans $\mathbb{E}(\kappa_1, \tau_1)$ et $\mathbb{E}(\kappa_2, \tau_2)$ avec $\kappa_1 - 4\tau_1^2 = \kappa_2 - 4\tau_2^2$.

Perspectives et projets

- Théorème d'Alexandrov dans les $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.
- L'opérateur de Dirac Spin^c sur les variétés CR.
- Structures Spin^c dans le cadre des feuilletages.

Perspectives et projets

- Théorème d'Alexandrov dans les $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.
- L'opérateur de Dirac Spin^c sur les variétés CR.
- Structures Spin^c dans le cadre des feuilletages.

Perspectives et projets

- Théorème d'Alexandrov dans les $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.
- L'opérateur de Dirac Spin^c sur les variétés CR.
- Structures Spin^c dans le cadre des feuilletages.

Merci pour votre attention